

ORSAY
Série A
N° d'ordre:
384

CONTRIBUTION A LA CONSTRUCTION D'UN MASER A HYDROGENE ATOMIQUE.
APPLICATION A L'ETUDE DE LA SATURATION DU NIVEAU D'OSCILLATION
DU MASER EN FONCTION DU FLUX D'ATOMES ENTRANT DANS LA CAVITE.

--:--:--

Article principal

Recouvrant en partie la thèse de Doctorat ès-Sciences Physiques
enregistrée au C.N.R.S. sous le numéro : A.O. 2418

de

CHECKRAHAMATOULA

Soutenue le 25 juin 1968 à la Faculté des Sciences d'Orsay,
devant le jury :

MM. P. GRIVET
F. BERTEIN
A. SEPTIER
J. UEBERSFELD



MÉMOIRE

LABORATOIRE DE L'HORLOGE ATOMIQUE, SECTION D'ORSAY,
INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE FONDAMENTALE, LABORATOIRE ASSOCIÉ AU C. N. R. S.

Bâtiment 220, Faculté des Sciences — 91 - Orsay

ÉTUDE DE LA SATURATION DU NIVEAU D'OSCILLATION DU MASER A HYDROGÈNE EN FONCTION DU FLUX D'ATOMES ENTRANT DANS LA CAVITÉ (*)

Par

CHECKRAHAMATOULA (**)

RÉSUMÉ

ABSTRACT

Le régime permanent du maser à hydrogène atomique est étudié dans le cadre d'une analogie avec les circuits électroniques ; les schémas équivalents que l'on déduit permettent d'analyser de façon claire et simple le comportement du maser. La susceptibilité magnétique des atomes d'hydrogène qui entre en jeu est ensuite calculée en utilisant le formalisme de la matrice densité dans l'approximation à deux niveaux ; la résolution des équations d'évolution de la matrice densité est facilement effectuée en les ramenant à la forme de Bloch. Les prévisions théoriques concernant la dépendance du niveau d'oscillation du maser en fonction du flux atomique ont été confirmées expérimentalement.

The steady state of an atomic hydrogen maser has been studied in the scheme of an analogy with electronic circuits; the equivalent diagrams so drawn allow a clear and simple analysis of the behaviour of the maser. The implicated magnetic susceptibility of the hydrogen atoms has then been calculated with the use of density matrix formalism in the approximation of two-level system; the solution of the equations for the time evolution of the density matrix is easily found by changing them to the form of Bloch. The atomic beam flux dependance of the oscillation level of the maser, predicted by the theory, has been experimentally confirmed.

(*) Ce travail est subventionné par le C. N. R. S. et la D. R. M. E.

(**) Cet article recouvre une partie de la thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, soutenue le 25 juin 1968, à la Faculté des Sciences d'Orsay, Université de Paris.

La thèse est enregistrée au C. N. R. S. sous le N° A. O.2418.

INTRODUCTION

Le maser à hydrogène atomique est connu depuis 1960, date à laquelle le premier appareil a été réalisé à l'Université de Harvard, par l'équipe du Professeur Ramsey [1, 2]. Rappelons en brièvement le principe de fonctionnement :

Un faisceau d'hydrogène atomique traverse le champ inhomogène d'un séparateur magnétique hexapolaire qui focalise les atomes de composantes ($F = 1, M = 1$) et ($F = 1, M = 0$) de la structure hyperfine, tandis que les atomes de composantes ($F = 1, M = -1$) et ($F = 0, M = 0$) sont défocalisés et éliminés. Le faisceau convergent pénètre ensuite dans un ballon de quartz dont la paroi interne est revêtue d'une fine couche de téflon et qui est placé à la région centrale d'une cavité résonnante (cylindrique fonctionnant sur le mode TE_{011}). Celle-ci est accordée à la fréquence de transition hyperfine ($F = 1, M = 0 \rightarrow F = 0, M = 0$), voisine de 1 420 MHz. Les atomes séjournent dans le ballon en moyenne pendant quelques dixièmes de seconde ; leur état interne n'est pratiquement pas perturbé au cours de nombreuses collisions ($\simeq 10^5$) contre la paroi, étant donné qu'ils réagissent extrêmement peu avec le téflon (fluoro-éthylène). Il en résulte une interaction prolongée des atomes avec le champ électromagnétique, compensant la petitesse des éléments de matrice de la transition dipolaire magnétique. L'auto-oscillation du maser est alors observée lorsque les pertes subies par le champ électromagnétique

régnant dans la cavité, tant par effet Joule que par transmission vers la charge d'utilisation, sont équilibrées par l'énergie fournie par les atomes subissant la transition $|1, 0\rangle \rightarrow |0, 0\rangle$.

Depuis sa création, le maser à hydrogène a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs aussi bien comme étalon de fréquence [3, 4] que comme outil de recherche dans le domaine de résonance magnétique [5, 6]. Nous nous sommes proposés d'étudier l'influence du flux atomique entrant dans la cavité sur le fonctionnement en régime permanent d'un tel oscillateur.

Cette étude est menée de la façon suivante : on analyse d'abord l'évolution du champ E. M. de la cavité en présence des atomes activés dans le cadre d'une analogie avec les circuits électroniques. Les schémas équivalents classiques que l'on établit fournissent des équations reliant les caractéristiques de la cavité à la susceptibilité magnétique des atomes. Le calcul de la susceptibilité magnétique est ensuite effectué en utilisant le formalisme de la matrice densité : les équations d'évolution de la matrice densité sont mises, dans un espace judicieusement choisi, sous la forme de Bloch dont la résolution, immédiate en régime permanent, fournit les expressions de la susceptibilité magnétique. La combinaison des résultats précédents permet alors d'étudier la puissance émise par les atomes dans le maser et de sa saturation sous l'influence du flux d'atomes entrant dans la cavité.

Évolution du champ de la cavité en présence des atomes activés

Équation d'évolution. — La présence du ballon de quartz dans la cavité cylindrique lève la dégénérescence du mode TE_{011} , qui résonne normalement à la même fréquence que le mode TM_{111} . Nous supposons donc que seul le mode TE_{011} est excité et qu'il est bien séparé des modes voisins.

Le ballon se trouve dans une région où l'amplitude et la phase du champ magnétique sont sensiblement constantes ; Ramsey et coll. [7] ont montré que les atomes qui s'y déplacent d'un mouvement aléatoire peuvent être considérés comme immobiles et soumis à un champ magnétique variable dont l'amplitude est égale à celle de la composante H_z du champ magnétique du mode TE_{011} , prise en moyenne sur tout le volume du ballon. Par suite, l'aimantation acquise par le gaz peut être considérée comme uniforme.

La résolution des équations de Maxwell appliquées au champ électromagnétique de la cavité en présence des atomes activés et d'un courant excitateur éventuel, fournit l'équation :

$$\overset{\infty}{h}(t) + \frac{\omega_c}{Q_c} \overset{o}{h}(t) + \omega_c^2 h(t) + \gamma' \overset{\infty}{m}(t) = f(t) \quad (1)$$

où $h(t)$ est la composante temporelle du champ magnétique, $m(t)$ celle de l'aimantation du gaz et $f(t)$ une fonction d'amplitude proportionnelle au courant excitateur ; ω_c et Q_c représentent respectivement la pulsation d'accord et le coefficient de surtension de la cavité ; γ' est le coefficient de remplissage de la cavité par le milieu actif et défini par [8] :

$$\gamma' = \frac{V_b}{V_c} \cdot \frac{\langle H_z \rangle_{\text{ballon}}^2}{\langle H^2 \rangle_{\text{cavité}}} = \frac{V_b}{V_c} \cdot \eta \quad (2)$$

V_b et V_c désignent les volumes respectifs du ballon et de la cavité. Les valeurs de η , dans le cas de la cavité cylindrique fonctionnant sur le mode TE_{011} , ont été calculées par Ramsey et coll. [7].

En régime permanent sinusoïdal de pulsation ω , le champ magnétique $h(t)$ et l'aimantation $m(t)$ sont

liés par une relation linéaire. On peut écrire en notation complexe :

$$\begin{cases} h(t) \propto e^{j\omega t} \\ m(t) = \chi \cdot h(t) \propto \chi e^{j\omega t} \end{cases} \quad (3)$$

χ est la susceptibilité magnétique complexe des atomes. La substitution de ces expressions dans l'équation (1) conduit à :

$$\left[-(1 + \eta' \chi) \omega^2 + j \frac{\omega \omega_c}{Q_c} + \omega_c^2 \right] h(t) = f(t) \quad (4)$$

relation qui va nous permettre de déterminer les circuits équivalents.

Les circuits équivalents. — Supposons l'excitation $f(t)$ sinusoïdale de pulsation ω et fournie par l'intermédiaire d'une ligne coaxiale terminée par une boucle de couplage (fig. 1 a). Soient $v(t)$ et $i(t)$ la tension et l'intensité du courant à l'entrée AB de la cavité. $i(t)$ se retrouve dans la boucle et y constitue précisément le courant excitateur en question ; la tension $v(t)$ est due à la force électromotrice induite dans la boucle par le champ $h(t)$. Il en résulte que :

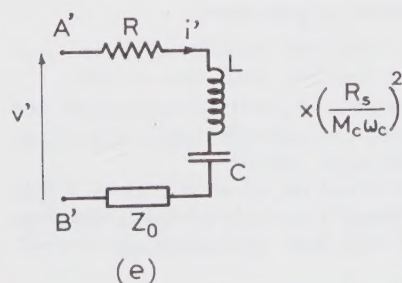
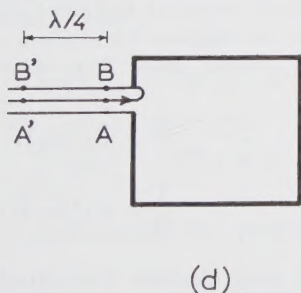
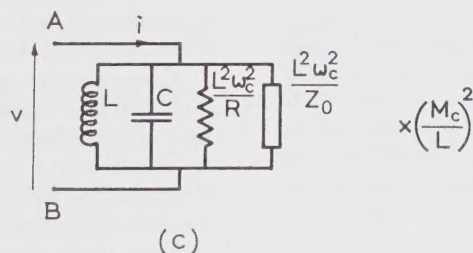
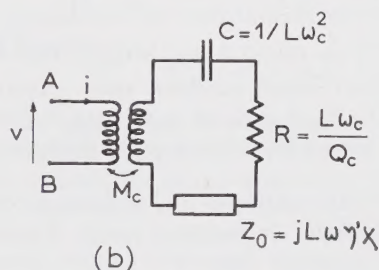
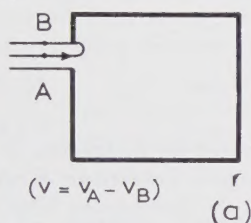


FIG. 1. — Les circuits équivalents.

En fait, ce qui détermine le circuit vis-à-vis de l'extérieur, c'est son impédance d'entrée ρ/i prise aux bornes AB de la cavité ; d'après (6), elle s'écrit à l'accord des fréquences ($\omega \neq \omega_c$) :

$$Z = \frac{M_c^2/L^2}{Z_0/L^2\omega_c^2 + \left(1 + 2jQ_c \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c}\right)/L\omega_c Q_c} \quad (7)$$

On constate que l'élément cavité-boucle pris aux bornes AB est équivalent à un circuit homothétique dans le rapport M_c^2/L^2 d'un circuit antirésonnant shunté par les impédances $L^2\omega_c^2/R = L\omega_c Q_c$ et $L^2\omega_c^2/Z_0$ et alimenté en dérivation (fig. 1 c). Bien que simple, ce schéma se prête assez mal à la discussion (circuit bouchon).

Supposons alors que la cavité munie de sa boucle est fixée à un tronçon de ligne de longueur quart d'onde (fig. 1 d). Soit R_s la résistance caractéristique de la ligne. L'impédance d'entrée Z' aux bornes A'B' de l'élément ainsi formé est égale à R_s^2/Z , soit :

$$Z' = \frac{R_s^2}{M_c^2\omega_c^2} \left[Z_0 + \frac{L\omega_c}{Q_c} \left(1 + 2jQ_c \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c} \right) \right] \quad (8)$$

L'élément équivaut à un circuit homothétique dans le rapport $R_s^2/M_c^2\omega_c^2$ d'un circuit oscillant série ouvert, d'éléments L , C , R , Z_0 (fig. 1 e). C'est ce schéma, le plus simple de tous, que nous adopterons pour la discussion dans la suite.

Remarquons qu'il est indifférent qu'on fasse intervenir un tronçon de ligne de longueur quart d'onde ou différente, pourvu que la ligne soit adaptée avec l'extérieur. Nous le supposons dans la suite.

Le maser oscillateur. — Discussion sur le gain fourni par la cavité. — La cavité excitée par une onde progressive incidente donne naissance à une onde sortante qui lui est proportionnelle ; le coefficient de proportionnalité est le gain G de la cavité. Si nous nous plaçons aux bornes A'B', G est relié à l'impédance d'entrée Z' par :

$$G = \frac{Z' - R_s}{Z' + R_s} \quad (9)$$

Trois cas peuvent alors se présenter :

i) $|G| < 1$. La cavité est un élément passif possédant une résistance positive, donc sans intérêt.

ii) $|G| > 1$, mais fini. La cavité possède alors une résistance négative, de là un caractère actif ; le montage est donc un amplificateur sélectif.

iii) $|G| \rightarrow \infty$. La cavité est un amplificateur à gain infini, c'est-à-dire fournit une onde de sortie pour un signal d'entrée nul ; c'est donc un oscillateur.

Détermination des caractéristiques du maser oscillateur. — En exprimant que le gain tend vers l'infini, autre-

ment dit en annulant le dénominateur de G , nous obtenons d'après (8) et (9) :

$$\frac{1}{Q_c} \left[1 + 2jQ_c \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c} \right] + j\eta'\chi + \frac{1}{Q_s} = 0 \quad (10)$$

Q_s désigne le facteur de qualité du couplage avec l'extérieur, défini de façon classique ($Q_s = LR_s/M_c^2\omega_c$).

La susceptibilité magnétique χ , dont la présence dans les équations n'est que formelle, dépend de l'amplitude du champ $\hat{H}$ et des fréquences d'oscillation ω et de transition ω_0 . Nous calculerons dans le paragraphe suivant l'expression de χ ; mais nous pouvons déjà l'écrire en mettant en évidence sa partie réelle χ' et sa partie imaginaire χ'' :

$$\chi = \chi' - j\chi'' \quad (11)$$

Nous verrons que χ' est proportionnel à $\omega - \omega_0$ et χ'' négatif.

La combinaison des relations (10) et (11) permet de déterminer les caractéristiques du maser.

A l'accrochage $\omega \simeq \omega_c \simeq \omega_0$ et $\hat{H} \simeq 0$, de sorte que (10) se réduit à :

$$\eta' |\chi''(0, \omega_0)| = \frac{1}{Q} \quad \left(\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_s} \right) \quad (12)$$

Q est le coefficient de surtension de la cavité, compte tenu du couplage à l'extérieur. C'est la forme actuelle de la condition de Barkhausen bien connue en électronique classique. Il est à prévoir que l'oscillation se maintient par continuité lorsque la condition en question est dépassée. L'excitation initiale nécessaire pour le démarrage de l'oscillation est fournie par les fluctuations (bruit de fond) toujours présentes.

Après l'amorçage, l'amplitude de l'oscillation croît d'autant plus rapidement que l'on s'écarte de la condition d'accrochage. A mesure que l'amplitude croît, la non-linéarité prend une importance croissante et c'est elle qui va amener l'oscillation à son régime permanent. Cette non-linéarité peut se caractériser en effet comme étant une diminution d'activité des atomes (tendance à la saturation), de sorte que l'on prévoit une amplitude croissant de plus en plus lentement et qui, finalement, se stabilise. La relation (10) entre quantités complexes fournit alors deux équations réelles :

$$2 \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c} + \eta'\chi'(\omega, \hat{H}) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{Q} + \eta'\chi''(\omega, \hat{H}) = 0 \quad (14)$$

d'où l'on peut déduire l'amplitude et la pulsation d'oscillation du maser connaissant les expressions de χ' et χ'' .

Calcul de la susceptibilité magnétique des atomes soumis à des perturbations

L'opérateur densité de l'atome d'hydrogène dans l'approximation à deux niveaux. — L'oscillation maser utilise la transition $\Delta M = 0$ de la structure hyperfine de l'atome d'hydrogène à l'état fondamental; elle est induite dans un champ magnétique statique (de faible valeur) parallèle au champ magnétique variable de la cavité. L'évolution des atomes sera donc étudiée dans la base d'états de structure hyperfine $|F, M\rangle$.

L'approximation à deux niveaux consiste à supposer que les états $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$ qui participent à la transition $\Delta M = 0$ ne sont pas affectés par les états voisins $|1, 1\rangle$ et $|1, -1\rangle$. Les vecteurs de base seront donc $|1, 0\rangle$ et $|0, 0\rangle$ que nous numérotions respectivement $|1\rangle$ et $|2\rangle$.

Nous supposons, par ailleurs, que les atomes pénétrant dans le ballon à l'instant $t = 0$ se trouvent à l'état $|1\rangle$. A l'instant ultérieur t , le milieu gazeux sera caractérisé par la superposition d'états $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Le formalisme de la matrice densité fournit un moyen d'étude commode de cet état mélange. Si nous désignons par ρ l'opérateur densité d'un atome, sa matrice aura, dans l'approximation à deux niveaux, deux lignes et deux colonnes :

$$\|\rho\| = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} |1\rangle \\ |2\rangle \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \langle 1| \\ \langle 2| \end{vmatrix} \quad (15)$$

Évolution de la matrice densité de l'atome.

— L'évolution de l'opérateur densité de l'atome est régie par l'équation opérationnelle suivante :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{j}{\hbar} [\mathcal{H}, \rho] \quad (16)$$

$\mathcal{H}$ est l'hamiltonien total de l'atome. Relativement aux éléments de matrice (16) s'écrit :

$$\dot{\rho}_{nn'} = -\frac{j}{\hbar} \sum_{n''} (\mathcal{H}_{nn'} \rho_{n''n''} - \rho_{nn''} \mathcal{H}_{n''n'}) \quad (17)$$

si cet atome est soumis à une perturbation cohérente. Quand il s'agit de phénomènes de relaxation, on montre qu'il convient d'écrire [9, 10] :

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{nn} = \sum_{n'} (\varpi_{nn'}^R \rho_{n'n'} - \varpi_{n'n}^R \rho_{nn}) \\ \dot{\rho}_{nn'} = -\frac{1}{\tau_{nn'}^R} \rho_{nn'} \quad n \neq n' \end{cases} \quad (18)$$

où $\varpi_{nn'}^R$ et $1/\tau_{nn'}^R$ représentent des probabilités de relaxation.

La perturbation cohérente. — L'interaction de structure hyperfine de l'atome est caractérisée par l'hamil-

tonien non perturbé $\mathcal{H}_0$, ayant pour éléments de matrice :

$$\langle n | \mathcal{H}_0 | n' \rangle = W_n \delta_{nn'} \quad (n, n' = 1, 2) \quad (19)$$

W_n est la valeur propre de l'énergie correspondant à l'état $|n\rangle$ et $\delta_{nn'}$ le symbole de Kronecker.

L'action, sur les atomes, de l'induction magnétique variable $B_1(t) = \mu_0 \hat{H} \cos \omega t = \hat{B}_1 \cos \omega t$ (μ_0 : perméabilité du vide) se traduit par un hamiltonien d'interaction $\mathcal{H}_1$. Lorsque $B_1(t)$ est parallèle au champ statique, les éléments de matrice de $\mathcal{H}_1$ sont [7] :

$$\langle n | \mathcal{H}_1 | n' \rangle \cong -\mu_B (1 - \delta_{nn'}) B_1(t) \quad (20)$$

μ_B est le magnéton de Bohr.

La matrice densité de l'atome soumis à la perturbation cohérente évolue d'après (17) selon :

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} = -j \frac{\mu_B}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) B_1(t) = -\dot{\rho}_{22} \\ \dot{\rho}_{12} = -j \frac{\mu_B}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) B_1(t) - j \omega_0 \rho_{12} = \dot{\rho}_{21}^* \end{cases} \quad (21)$$

La pulsation de transition ω_0 est définie par la relation d'Einstein :

$$W_1 - W_2 = \hbar \omega_{12} = \hbar \omega_0 \quad (22)$$

Les phénomènes de relaxation. — Les phénomènes de relaxation auxquels sont soumis les atomes comportent : la collision des atomes entre eux, d'où résulte l'échange de leurs spins électroniques [5, 11, 12, 13, 14], l'interaction des atomes avec le revêtement de la paroi du ballon [5, 13] ; d'autres processus, dont certains sont analysés par Ramsey et coll [7]. Tous ces phénomènes aléatoires étant indépendants les uns des autres, leurs effets s'ajoutent. Leur contribution peut s'écrire d'après (18) :

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} - \dot{\rho}_{22} = -\frac{1}{\tau_1^R} (\rho_{11} - \rho_{22}) + (\varpi_{12}^R - \varpi_{21}^R) \\ \dot{\rho}_{12} = -\frac{1}{\tau_2^R} \rho_{12} = \dot{\rho}_{21}^* \end{cases} \quad (23)$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \tau_1^R = 1/(\varpi_{12}^R + \varpi_{21}^R) \\ \tau_2^R = \tau_{12}^R = \tau_{21}^R \end{cases} \quad (24)$$

La différence $\varpi_{12}^R - \varpi_{21}^R$ est calculée en considérant l'état d'équilibre. La matrice densité à l'équilibre ρ^0 obéit à $\dot{\rho}_{12}^0 = \dot{\rho}_{21}^0 = 0$ et $\varpi_{21}^R \rho_{11}^0 - \varpi_{12}^R \rho_{22}^0 = 0$; les éléments diagonaux ρ_{nn}^0 sont proportionnels à leur facteur de Boltzmann $\exp(W_n/KT)$. Il en résulte :

$$\varpi_{12}^R - \varpi_{21}^R = \frac{1}{\tau_1^R} \tanh\left(\frac{\hbar \omega_0}{2KT}\right) \quad (25)$$

Les temps de relaxation τ_1^R et τ_2^R comprennent les différentes contributions dont nous nous contenterons de mettre en évidence celle d'échange de spins :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau_1^R} = \frac{1}{\tau_1^E} + \frac{1}{\tau_1^D} \\ \frac{1}{\tau_2^R} = \frac{1}{\tau_2^E} + \frac{1}{\tau_2^D} \end{array} \right. \quad (26)$$

(L'exposant caractérise le phénomène : R, relaxation globale ; E, échange de spins ; D, divers).

Stockage des atomes. — Enfin, il y a lieu de considérer le phénomène mécanique de stockage des atomes dans le ballon et la contribution apportée par ce phénomène à l'évolution de la matrice densité.

Supposons qu'un certain gaz A soit présent dans le ballon et qu'à l'instant $t = 0$ un autre gaz B y soit admis. Celui-ci va remplacer progressivement le gaz A qui s'échappe. Les concentrations respectives N_A et N_B des gaz A et B, dont la somme N est constante (écoulement permanent du gaz), évoluent suivant les lois exponentielles :

$$\begin{aligned} N_A &= N e^{-t/\tau_b} \\ N_B &= N(1 - e^{-t/\tau_b}) \end{aligned}$$

τ_b est la constante de temps du ballon. Si alors ρ_A et ρ_B sont respectivement les opérateurs densité des gaz A et B à l'instant $t = 0$, celui du mélange à l'instant t aura pour expression :

$$\rho(t) = \frac{N_A \rho_A + N_B \rho_B}{N_A + N_B} = \rho_A e^{-t/\tau_b} + \rho_B (1 - e^{-t/\tau_b})$$

Il est facile de voir que cette expression vérifie les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{11} = \frac{1}{\tau_b} (1 - \rho_{11}) \\ \rho_{12} = \frac{1}{\tau_b} \rho_{12} = \rho_{21}^* \\ \rho_{22} = -\frac{1}{\tau_b} \rho_{22} \end{array} \right. \quad (27)$$

si nous prenons comme gaz B les atomes d'hydrogène dont la matrice densité à l'instant $t = 0$ est :

$$\|\rho(0)\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \quad (28)$$

Équations d'évolution globale de la matrice densité.

— Les perturbations considérées sont indépendantes les unes des autres ; leurs effets se superposent. On obtient donc les équations globales de la matrice densité en faisant la somme des différentes contributions exprimées ci-dessus :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{11}^0 - \rho_{22}^0 = -j \frac{2\mu_B}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{21}) B_1(t) \\ \quad - \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_b} + \frac{1}{\tau_1^R} i \hbar \left(\frac{\hbar \omega_0}{2KT} \right) \\ \rho_{12}^0 = -j \frac{\mu_B}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) B_1(t) \\ \quad - \frac{\rho_{12}}{\tau_2} - j \omega_0 \rho_{12} = \rho_{21}^{0*} \end{array} \right. \quad (29)$$

où l'on a posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_b} + \frac{1}{\tau_1^R} = \frac{1}{\tau_b} + \frac{1}{\tau_1^E} + \frac{1}{\tau_1^D} \\ \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_b} + \frac{1}{\tau_2^R} = \frac{1}{\tau_b} + \frac{1}{\tau_2^E} + \frac{1}{\tau_2^D} \end{array} \right. \quad (30)$$

Résolution des équations d'évolution. — **Passage aux équations de Bloch.** — Nous faisons choix d'un système d'axes orthogonaux $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et dans ce système, nous définissons deux vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{B}$ tels que :

$$\left. \begin{array}{l} M_u = \mu_B (\rho_{12} + \rho_{21}) \\ M_v = j \mu_B (\rho_{12} - \rho_{21}) \\ M_w = \mu_B (\rho_{11} - \rho_{22}) \end{array} \right\} \quad (31) \quad \left. \begin{array}{l} B_u = B_1(t) \\ B_v = 0 \\ B_w = -\frac{\hbar}{2\mu_B} \cdot \omega_0 \end{array} \right\} \quad (32)$$

En substituant les composantes de $\vec{M}$ aux éléments de ρ dans les équations (28), il est facile de voir que $\vec{M}$ satisfait à l'équation vectorielle de Bloch :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \cdot \vec{M} \wedge \vec{B} - \frac{M_u \vec{u} + M_v \vec{v}}{\tau_2} - \frac{(M_w - M_0) \vec{w}}{\tau_1} \quad (32)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{2\mu_B}{\hbar} \\ M_0 = \mu_B \tau_1 \left[\frac{1}{\tau_b} + \frac{1}{\tau_1^R} i \hbar \left(\frac{\hbar \omega_0}{2KT} \right) \right] \end{array} \right. \quad (33)$$

Le champ directeur fictif B_w est très grand devant l'amplitude du champ variable $B_1(t)$ qui lui est perpendiculaire $\left(\left| \frac{B_u}{B_w} \right| \neq 10^{-8} \right)$. Nous sommes donc devant un problème tout à fait classique de la résonance magnétique. Dans un système d'axes orthogonaux $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ tournant autour de $\vec{w}'/\vec{w}$ avec une vitesse angulaire ω (voisine de ω_0), l'équation de Bloch fournit la solution du régime permanent :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{u'} = \frac{1}{2} \frac{\gamma M_0 (\omega - \omega_0) \tau_2^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_2^2 + \left(\frac{\gamma \widehat{B}_1}{2} \right)^2 \tau_1 \tau_2} \widehat{B}_1 \\ M_{v'} = \frac{1}{2} \frac{\gamma M_0 \tau_1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_2^2 + \left(\frac{\gamma \widehat{B}_1}{2} \right)^2 \tau_1 \tau_2} \widehat{B}_1 \\ M_{w'} = \frac{1}{2} \frac{M_0 [1 + (\omega - \omega_0) \tau_2]}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_2^2 + \left(\frac{\gamma \widehat{B}_1}{2} \right)^2 \tau_1 \tau_2} \widehat{B}_1 \end{array} \right. \quad (34)$$

Les composantes de $\vec{M}$ sur les axes fixes s'en déduisent immédiatement puisque :

$$\begin{aligned} M_u + jM_v &= (M_{u'} + jM_{v'})e^{j\omega t} \\ M_w &= M_{w'} \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{cases} M_u = M_{u'} \cos \omega t - M_{v'} \sin \omega t \\ M_v = M_{u'} \sin \omega t + M_{v'} \cos \omega t \\ M_w = M_{w'} \end{cases} \quad (35)$$

Expressions de la susceptibilité magnétique des atomes.
— Il est maintenant possible de calculer la susceptibilité magnétique χ . En effet, d'après la définition classique, l'aimantation suivant le champ s'écrit : $\mathcal{M} = \chi H$ (en notation complexe) ; sa partie réelle a pour valeur :

$$\mathcal{M}' = \widehat{H}(\chi' \cos \omega t + \chi'' \sin \omega t) \quad (36)$$

La définition quantique nous donne :

$$\mathcal{M}' = N\mu_B (\rho_{12} + \rho_{21}) \quad (37)$$

N est la concentration en atomes dans le ballon. La comparaison de (35), (36) et (37) montre que χ' et χ''

ne sont, à un coefficient près, autres que $M_{u'}$ et $M_{v'}$ respectivement ; ils s'écrivent après substitution des divers paramètres par leur expression :

$$\chi' = \mu_0 \frac{N \cdot \frac{\mu_B^2}{\hbar} \tau_1 \tau_2^2 \left[\frac{1}{\tau_b} + \frac{1}{\tau_1^R} \cdot \text{th} \left(\frac{\hbar \omega_0}{2kT} \right) \right] (\omega - \omega_0)}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_2^2 + \left(\frac{\mu_B \widehat{B}_1}{\hbar} \right)^2 \tau_1 \tau_2} \quad (38)$$

$$\chi'' = -\mu_0 \frac{N \cdot \frac{\mu_B^2}{\hbar} \tau_1 \tau_2^2 \left[\frac{1}{\tau_b} + \frac{1}{\tau_1^R} \cdot \text{th} \left(\frac{\hbar \omega_0}{2kT} \right) \right]}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_2^2 + \left(\frac{\mu_B \widehat{B}_1}{\hbar} \right)^2 \tau_1 \tau_2} \quad (39)$$

Nous remarquons que chacune de ces expressions est la somme de deux termes : l'un correspond à l'écoulement permanent du gaz, l'autre au régime statique qui existerait si le gaz se trouvait en vase clos ($\tau_b \rightarrow \infty$). Le terme « statique » est toutefois négligeable en cas de température élevée (pratiquement la température ambiante), ce que nous supposons dans la suite.

Influence du flux atomique sur le niveau d'oscillation du maser à hydrogène. Saturation

Puissance émise par les atomes dans le maser.

— La puissance émise peut être calculée à partir des résultats obtenus dans les paragraphes précédents. En régime permanent d'écoulement de gaz, le flux I d'atomes d'état $|1\rangle$ pénétrant dans le ballon est relié à la concentration N par $N = I\tau_b/V_b$. La substitution de χ'' par son expression (où l'on néglige le terme « statique ») dans la relation (14) donne à l'accord des fréquences ($\omega \simeq \omega_0$) :

$$\widehat{B}_1^2 = \mu_0 \hbar \frac{\eta Q}{V_c} I - \frac{\hbar^2}{\mu_B^2} \cdot \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \quad (40)$$

Les constantes de temps τ_1 et τ_2 dépendent de I par l'intermédiaire des constantes de l'échange de spins τ_1^E et τ_2^E ; celles-ci sont en effet inversement proportionnelles à la concentration en atomes dans le ballon [15, 16]. Quant aux constantes τ_1^D et τ_2^D , nous supposons avec Ramsey et coll. [8] qu'elles sont constantes et indépendantes de la densité d'atomes.

En remarquant que la puissance rayonnée P est reliée à l'énergie électromagnétique moyenne W emmagasinée dans la cavité par :

$$\begin{cases} P = \frac{\omega_0}{Q} W \\ W = V_c \frac{\langle B^2 \rangle_{\text{cavité}}}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{V_b}{\eta} \cdot \frac{\widehat{B}_1^2}{\mu_0} \end{cases} \quad (41)$$

on arrive à :

$$\frac{P}{P_0} = -2q^2 \left(\frac{I}{I_0} \right)^2 + (1 - cq) \frac{I}{I_0} - 1 \quad (42)$$

P_0 , I_0 , q et c sont définis de la façon suivante :

$$P_0 = \frac{\hbar^2 V_c \omega_0}{2\mu_0 \eta Q \mu_B^2 \tau_l^2} \quad (43)$$

$$I_0 = \frac{2P_0}{\hbar \omega_0} = \frac{\hbar V_c}{\mu_0 \eta Q \mu_B^2 \tau_l^2} \quad (44)$$

$$q = \frac{\bar{v} \sigma_E}{\sqrt{2} \mu_0} \cdot \frac{\hbar}{\mu_B^2} \cdot \frac{1}{\eta Q} \cdot \frac{V_c}{V_b} \cdot \frac{\tau_b}{\tau_l} \cdot \frac{I_{\text{tot}}}{I} \quad (45)$$

$$c = \left[\frac{1/\tau_b + 1/\tau_1^D}{1/\tau_b + 1/\tau_2^D} \right]^{1/2} + 2 \left[\frac{1/\tau_b + 1/\tau_2^D}{1/\tau_b + 1/\tau_1^D} \right]^{1/2} \quad (46)$$

$$\frac{1}{\tau_l^2} = \left(\frac{1}{\tau_b} + \frac{1}{\tau_1^D} \right) \left(\frac{1}{\tau_b} + \frac{1}{\tau_2^D} \right) \quad (47)$$

où $\bar{v}$ désigne la vitesse thermique moyenne des atomes dans le ballon, σ_E la section efficace moyenne de l'échange de spins et I_{tot} le flux total d'atomes (d'états $|1,0\rangle$ et $|1,1\rangle$) entrant dans le ballon.

La relation (42) est identique à celle obtenue par Ramsey et coll. [8]. Nous reproduisons donc le résultat de leur discussion :

i) Pour que $\frac{P}{P_0}$ et $\frac{I}{I_0}$ soient tous deux positifs, il faut que :

$$q < (c - 2\sqrt{2})/(c^2 - 8) \quad (48)$$

ii) Lorsque cette condition est remplie, le maser oscille seulement si $\frac{I}{I_0}$ est compris entre les racines $\frac{I_1}{I_0}$ et $\frac{I_2}{I_0}$ du trinôme (42) :

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1 - cq - \sqrt{1 - 2cq + (c^2 - 8)q^2}}{4q^2} \quad (49)$$

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{1 - cq + \sqrt{1 - 2cq + (c^2 - 8)q^2}}{4q^2} \quad (50)$$

iii) Ajoutons que la puissance optimale rayonnée correspond à la valeur I_{op} du flux qui annule la dérivée du trinôme (42) :

$$\frac{I_{op}}{I_0} = \frac{1 - cq}{4q^2} \quad (51)$$

Au cas où $\tau_1^D = \tau_2^D = \tau'$, comme nous le supposons dans la suite, nous avons $c = 3$ et :

$$\frac{P}{P_0} = -2q^2 \left(\frac{I}{I_0} \right)^2 + (1 - 3q) \frac{I}{I_0} - 1 \quad (52)$$

$$q < 3 - 2\sqrt{2} \simeq 0,172 \quad (53)$$

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1 - 3q - \sqrt{1 - 6q + q^2}}{4q^2} \quad (54)$$

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{1 - 3q + \sqrt{1 - 6q + q^2}}{4q^2} \quad (55)$$

$$\frac{I_{op}}{I_0} = \frac{1 - 3q}{4q^2} \quad (56)$$

Le paramètre important q , dont dépend la puissance émise, caractérise l'état de fonctionnement du maser :

— Pour $q = 0$, P est une fonction linéaire de I ; c'est le cas où le maser fonctionne dans des conditions idéales.

— Pour $q \geq 0,172$, le maser cesse de fonctionner quel que soit le flux atomique.

— Pour $0 < q < 0,172$, la puissance émise est une fonction quadratique de I ; quand I augmente, le maser se sature d'autant plus rapidement que q est grand.

Vérification expérimentale. — Les mesures du niveau d'oscillation en fonction du flux atomique ont été effectuées sur notre maser à hydrogène à jet horizontal [17] qui est alimenté par une source d'hydrogène atomique intense [18, 19].

Le niveau d'oscillation est mesuré en valeur relative à l'aide d'un récepteur de haute sensibilité à double changement de fréquence et de bande passante étroite [20].

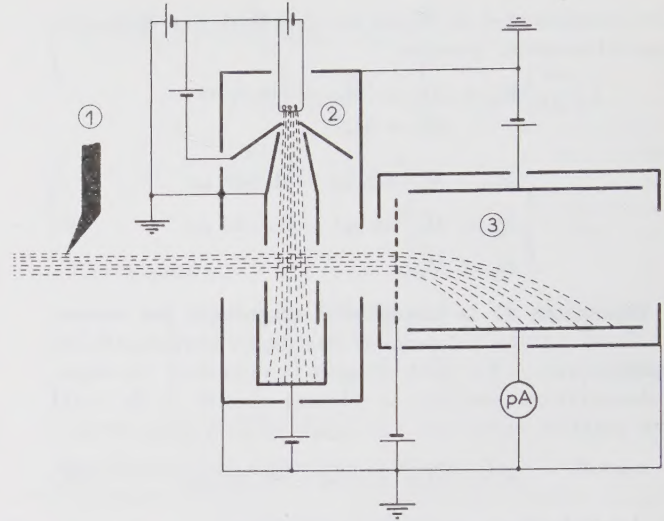


FIG. 2. — Schéma du dispositif de mesure du flux atomique.

1) couteau mobile; 2) canon à électrons; 3) collecteur d'ions.

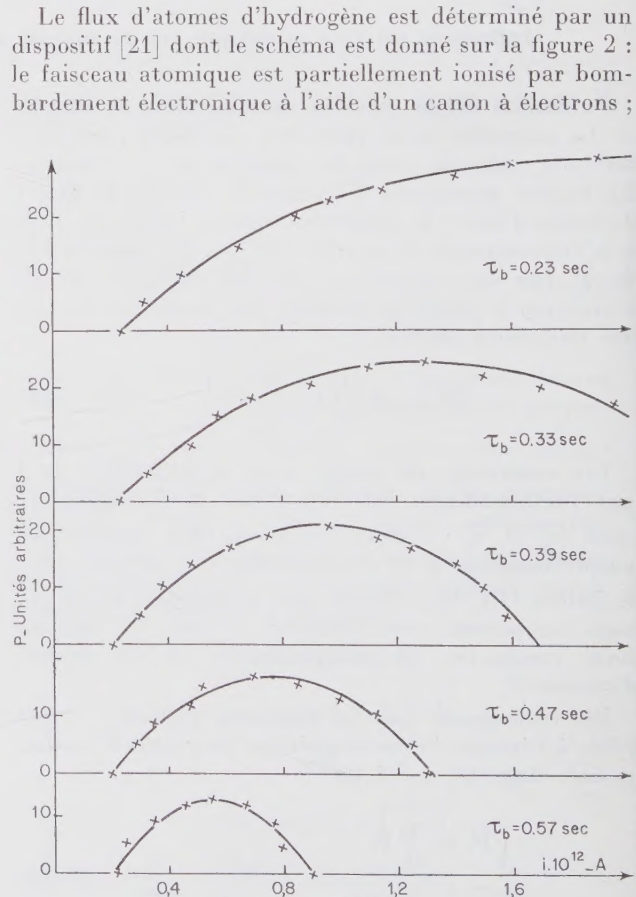


FIG. 3. — Les courbes de saturation.

les ions formés sont recueillis sur un collecteur dont le courant i , proportionnel au flux I , est mesuré par un picoampèremètre sensible. Un couteau mobile, dont le déplacement laisse plus ou moins d'atomes pénétrer dans le ballon, permet d'effectuer la variation du flux incident.

La figure 3 représente les courbes donnant la variation de la puissance mesurée (proportionnelle à P) en fonction du courant ionique (proportionnel à I) pour différentes valeurs de τ_b (donc de q). Celles-ci sont obtenues en plaçant dans le col du ballon des collimateurs de longueurs différentes. Ces courbes ont toutes l'allure parabolique et vérifient ainsi que P est bien une fonction quadratique de I .

Détermination du paramètre q . — A partir de chacune des courbes de saturation précédentes, on peut déterminer le paramètre q qui lui correspond. Soient en effet i_1 , i_2 et i_{op} les courants ioniques proportionnels aux flux correspondant respectivement aux extinctions d'oscillation et à l'oscillation optimale du maser. L'élimination de I_0 entre les relations (54) et (55) ou (56) fournit alors :

$$\begin{cases} q = [r\sqrt{2} + 3]^{-1} \\ r = \frac{I_1 + I_2}{\sqrt{I_1 + I_2}} = \frac{i_1 + i_2}{\sqrt{i_1 i_2}} \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} q' = [r'\sqrt{2} + 3]^{-1} \\ r' = \frac{I_{op}}{\sqrt{I_1(2I_{op} - I_1)}} = \frac{i_{op}}{\sqrt{i_1(2i_{op} - i_1)}} \end{cases} \quad (58)$$

Les valeurs de q ainsi déterminées sont consignées dans le tableau suivant :

τ_b -sec . .	0,23	0,33	0,39	0,47	0,57
q . . .	0,111	0,123	0,133	0,139	0,151
Δq . . .	0,017	0,018	0,017	0,018	0,016

Bien que notre maser à jet horizontal soit de conception ancienne, son paramètre q n'est pas trop élevé si on le compare à celui des masers actuellement vendus dans le commerce ($q \simeq 0,10$) et qui ont des facteurs de surtension de la cavité $Q \simeq 30\,000$. Par contre, il est nettement supérieur à celui de notre maser à jet vertical [22, 23] beaucoup plus récent ($q \simeq 0,053$) et dont le coefficient de surtension de la cavité est $Q = 50\,700$. Pour expliquer cette augmentation des valeurs de q , on ne peut guère invoquer, en dehors de l'influence évidente de la valeur peu élevée de Q ($= 43\,000$), que la pollution de l'hydrogène ou du dépôt de téflon du ballon par la vapeur d'huile de pompes à diffusion. Dans notre maser à jet vertical et dans les masers du commerce, l'évacuation du gaz est en effet

effectuée à l'aide des pompes ioniques qui éliminent toute contamination.

Détermination de la constante de temps τ' .

— Une autre conséquence obtenue par le tracé des courbes de saturation, est la détermination de la constante de temps relative aux phénomènes autres que l'échange de spins. Dans l'hypothèse où $\tau_1^D = \tau_2^D = \tau'$ (et sur laquelle est basée notre étude expérimentale), la combinaison des relations (45) et (46) fournit :

$$\begin{cases} \Lambda \frac{q}{\tau_b} = \frac{1}{\tau'} + \frac{1}{\tau_b} \\ \Lambda = \frac{\sqrt{2}\mu_0}{\bar{\nu}} \cdot \frac{\mu_B^2}{\hbar} \cdot \frac{\eta Q}{\sigma_E} \cdot \frac{V_b}{V_c} \cdot \frac{I}{I_{tot}} \end{cases} \quad (59)$$

La courbe de $\Lambda \frac{q}{\tau_b}$ en fonction de $\frac{1}{\tau_b}$ est donc une droite dont l'ordonnée à l'origine est égale à $\frac{1}{\tau'}$.



FIG. 4. — Variation de $\frac{\Lambda q}{\tau_b}$ en fonction de $\frac{1}{\tau_b}$.

La figure 4 montre que les points figuratifs de $\Lambda \frac{q}{\tau_b}$ en fonction de $\frac{1}{\tau_b}$, obtenues des mesures précédentes, s'alignent sur une droite; l'extrapolation de cette droite pour $\frac{1}{\tau_b} = 0$ fournit :

$$\tau' = 0,50 \text{ sec} \begin{cases} + 0,17 \text{ sec} \\ - 0,08 \text{ sec} \end{cases}$$

CONCLUSION

En faisant appel à des circuits équivalents classiques, nous avons tenté de rendre l'étude du maser à hydrogène plus simple ; l'analyse séparée de l'action réciproque du champ et du milieu actif contribue à ce résultat.

La dépendance quadratique du niveau d'oscillation du maser en fonction du flux atomique, prévue par la théorie, a été vérifiée expérimentalement. Grâce à l'intensité élevée du jet fourni par notre source et à une mise au point délicate du dispositif de mesure du flux atomique, l'étude expérimentale fut menée à bonne fin.

Le tracé des courbes de saturation nous a permis de déterminer les valeurs du paramètre q du maser et, par conséquent, la constante du temps τ' relative aux phénomènes autres que l'échange de spins. Cette méthode de mesure de q est peut-être la plus directe et non moins précise que les autres (méthode de sur-tension de la cavité, observation des phénomènes transitoires, etc.). Toutefois, elle ne peut s'appliquer qu'à un maser expérimental où l'on peut faire varier le flux d'atomes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. M. GOLDENBERG, D. KLEPPNER et N. F. RAMSEY. — *Phys. Rev. Lett.*, 1960, **5**, 361.
- [2] H. M. GOLDENBERG. — Ph. D. Thesis, Harvard, 1960.
- [3] C. MENOUD et J. RACINE. — *Helvetica Physica Acta*, 1962, **35**, 562.
- [4] R. F. C. VESSOT et H. E. PETERS. — *I. R. E. Trans. on Instr.*, 1962, **11**, 183.
- [5] H. C. BERG. — *Phys. Rev.*, 1965, **137**, A 1621.
- [6] S. B. CRAMPTON, H. G. ROBINSON, D. KLEPPNER et N. F. RAMSEY. — *Phys. Rev.*, 1966, **141**, 55.
- [7] D. KLEPPNER, H. M. GOLDENBERG et N. F. RAMSEY. — *Phys. Rev.*, 1962, **126**, 603.
- [8] D. KLEPPNER, H. C. BERG, S. B. CRAMPTON, N. F. RAMSEY, R. F. C. VESSOT, H. E. PETERS et J. VANIER. — *Phys. Rev.*, 1965, **138**, n° 4 A, 972.
- [9] A. ABRAGAM. — *Les principes du magnétisme nucléaire*, éd. P. U. F., 1961, p. 283.
- [10] Ch. P. SLICHTER. — *Principles of Magnetic Resonance*, ed. Harper's and Row, 1963, p. 142.
- [11] P. L. BENDER. — *Phys. Rev.*, 1963, **132**, 2154.
- [12] L. C. BALLING, R. J. HANSON et F. M. PIPKIN. — *Phys. Rev.*, 1964, **133**, A 607.
- [13] H. C. BERG. — Ph. D. Thesis, Harvard, 1964.
- [14] S. B. CRAMPTON. — Ph. D. Thesis, Harvard, 1964.
- [15] J. P. WITTKÉ et R. H. DICKE. — *Phys. Rev.*, 1956, **103**, 620.
- [16] R. M. MAZO. — *J. Chem. Phys.*, 1961, **34**, 169.
- [17] C. AUDOIN et CHECKRAHAMATOULA. — *L'Onde électrique*, 1965, t. XLV, 1133.
- [18] CHECKRAHAMATOULA. — *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1965, **260**, série B, 1391.
- [19] CHECKRAHAMATOULA. — *Journal de Physique* (à paraître).
- [20] C. AUDOIN. — Thèse, Paris, 1967.
- [21] CHECKRAHAMATOULA. — Thèse, Paris, 1968.
- [22] M. DESAINTEFUSCIEN et J. P. SCHERMANN. — *L'Onde électrique*, octobre 1966.
- [23] C. AUDOIN, M. DESAINTEFUSCIEN et J. P. SCHERMANN. — *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1967, **264**, série B, 698.

1000
1000
1000

1000
1000
1000

1000
1000
1000

1000
1000
1000

1000
1000
1000

1000
1000
1000

1000
1000
1000

1000
1000
1000